NOTION DE FONCTION

Partie 1 : Vocabulaire et notations

Exemple d'introduction :
Dans un théâtre, l'achat d'un abonnement à 20 € permet d'avoir un tarif réduit sur les places de spectacle et de la payer 12 €.

Prix du spectacle pour :
2 places : $20 + 2 \times 12 = 44$ €
4 places : $20 + 4 \times 12 = 68$ €
10 places : $20 + 10 \times 12 = 140$ €
x places : $20 + x \times 12 = 20 + 12x$ €

Pour un nombre de places donné, on fait correspondre le prix à payer.
Par exemple : $2 \longmapsto 44$
$10 \longmapsto 140$

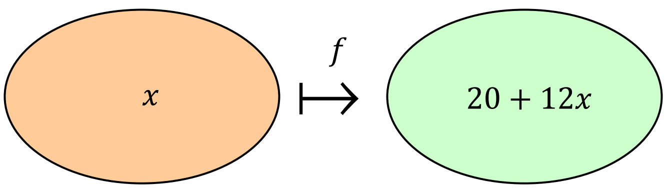
De façon générale, pour x places, on note : $x \mapsto 20 + 12x$

$x \longmapsto 20 + 12x$ se lit « à x, on associe $20 + 12x$ ».

La correspondance qu'on a établie entre x et $20 + 12x$ peut porter un nom.
On va l'appeler f, et on note :

$$\boxed{f : x \mapsto 20 + 12x}$$

f est appelée une **fonction**. C'est une « machine » mathématique qui, à un nombre donné, fait correspondre un autre nombre.



Nombre de départ

Nombre associé

x est appelée la **variable**.

On note également : $\boxed{f(x) = 20 + 12x}$
$f(x)$ se lit « f de x ».

$f : 10 \longmapsto 144$ peut donc s'écrire : $f(10) = 144$

On peut résumer les résultats précédents dans un tableau qui s'appelle ***tableau de valeurs***.

x	*2*	*4*	*10*
$f(x)$	**44**	**68**	**140**

Méthode : Résoudre un problème à l'aide d'une fonction

On donne le programme de calcul suivant :
- Choisir un nombre
- Enlever 2
- Multiplier par 2
- Ajouter 3

1) Appliquer le programme en prenant 4 comme nombre de départ.
2) On prend x comme nombre de départ.
   Donner le résultat du programme en fonction de x.
3) On appelle f la fonction qui associe à x le résultat du programme.
   Donner l'expression de la fonction f à l'aide des deux notations suivantes :
   $f: x \mapsto \ldots$
   $f(x) = \cdots$
4) Compléter le tableau de valeurs :

x	4	6	10
$f(x)$			

Correction

1) En prenant 4 au départ :
- 4
- $4 - 2 = 2$
- $2 \times 2 = 4$
- $4 + 3 = 7$

En prenant 4 au départ, on obtient 7.

2) En prenant x au départ :
- x
- $x - 2$
- $2 \times (x - 2)$
- $2 \times (x - 2) + 3$

En prenant x au départ, on obtient $2(x - 2) + 3$.

On peut simplifier l'expression :

$$\begin{aligned} 2(x-2)+3 &= 2 \times x + 2 \times (-2) + 3 \\ &= 2x - 4 + 3 \\ &= 2x - 1 \end{aligned}$$

3) $f(x) = 2x - 1$
   $f: x \mapsto 2x - 1$

4)

x	4	6	10
$f(x)$	7	11	19

$2 \times 4 - 1$
$= 8 - 1$
$= 7$

Partie 2 : Image, antécédent

Exemple :
Dire que : $f(2) = 5$ signifie que :

$2 \longmapsto 5$

Antécédent de 5 | Image de 2

On dit que :
- l'**image** de 2 par la fonction f est 5.
- un **antécédent** de 5 par f est 2.

Méthode : Déterminer une image et un antécédent par une fonction

Soit le tableau de valeurs suivant de la fonction f :

x	-4	6	10	18	20
$f(x)$	18	20	-4	38	18

Compléter alors :
a) L'image de -4 par f est …
b) f : … $\longmapsto -4$
c) $f(20) = \cdots$
d) Un antécédent de 18 par f est …

Correction
a) L'image de -4 par f est 18, car $-4 \longmapsto 18$.
b) f : $10 \longmapsto\ -4$
c) $f(20) = 18$
d) Un antécédent de 18 par f est -4 ou 20, car $f(-4) = 18$ et $f(20) = 18$.

Remarques :
- Un nombre peut posséder **plusieurs antécédents**.

Par exemple : Ici, des antécédents de 18 sont -4 et 20.
- Cependant, un nombre possède une **unique image**.

Méthode : Déterminer l'image d'une fonction par calcul

Soit la fonction g définie par $g(x) = x^2 - 2$.
Calculer l'image de 6 par la fonction g.

Correction
$g(x) = x^2 - 2$
$g(6) = 6^2 - 2$
$g(6) = 36 - 2$
$g(6) = 34$
L'image de 6 par la fonction g est 34.

Méthode : Déterminer un antécédent par calcul

Soit la fonction f définie par $f(x) = 2x - 3$.
Déterminer un antécédent de -5 par la fonction f.

Correction
On cherche un antécédent de -5 donc -5 est une image.
On peut donc écrire : $f(x) = -5$
Soit : $2x - 3 = -5$

On résout ainsi l'équation :
$2x = 3 - 5$
$2x = -2$
$x = -1$
L'antécédent de -5 par f est donc -1.

Partie 3 : Représentation graphique d'une fonction

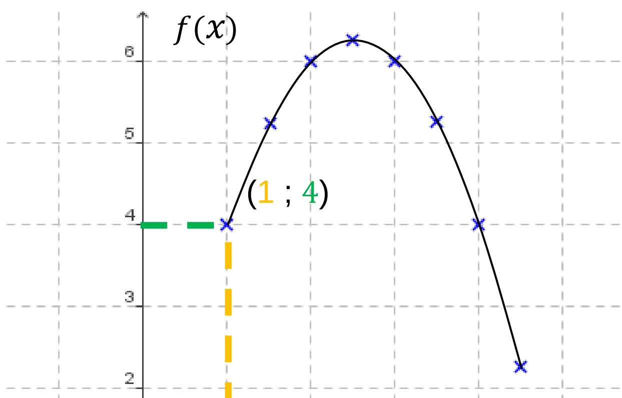
1. Construction d'une courbe

Méthode : Représenter graphiquement une fonction

Soit la fonction f définie par $f(x) = 5x - x^2$.
On donne un tableau de valeurs de la fonction f :

x	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5
$f(x)$	**4**	**5,25**	**6**	**6,25**	**6**	**5,25**	**4**	**2,25**

Tracer, dans un repère, la courbe représentative de la fonction f.
Correction
On représente les données du tableau de valeurs dans un repère tel qu'on trouve en abscisse les valeurs de x et en ordonnée les valeurs de $f(x)$ correspondantes.



En reliant les points, on obtient une courbe.
Tout point de la courbe possède donc des coordonnées de la forme $(x\ ;\ f(x))$.

Remarque :
Les images $f(x)$ se lisent sur l'axe des ordonnées (y) donc la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = 5x - x^2$ peut se noter $y = 5x - x^2$.
De façon générale, l'équation d'une courbe d'une fonction f se note $y = f(x)$.

En latin, « curbus » désignait ce qui est courbé. On retrouve le mot en ancien français sous la forme de « corbe ». Le corbeau est ainsi appelé à cause de la forme de son bec.

Comprendre les notations sur les fonctions :

Méthode : Vérifier si un point appartient à la courbe d'une fonction

Soit la fonction f définie par $f(x) = x^2 + 3$
Vérifier que le point de coordonnées $(-2\ ;\ 7)$ appartient à la courbe de f.

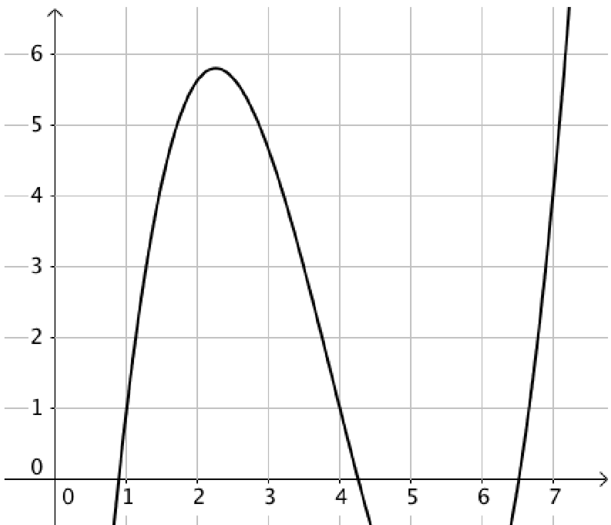
Correction
Le point de coordonnées $(-2\ ;\ 7)$ appartient à la courbe si $f(-2) = 7$.
$f(-2) = (-2)^2 + 3 = 4 + 3 = 7$
Donc le point de coordonnées $(-2\ ;\ 7)$ appartient à la courbe de f.

2. Lecture graphique d'une image et d'un antécédent

Méthode : Lire graphiquement une image et un antécédent

On considère la fonction f représentée ci-contre.

Déterminer graphiquement :
a) L'image de 7 par la fonction f.
b) Trois antécédents de 1 par la fonction f.

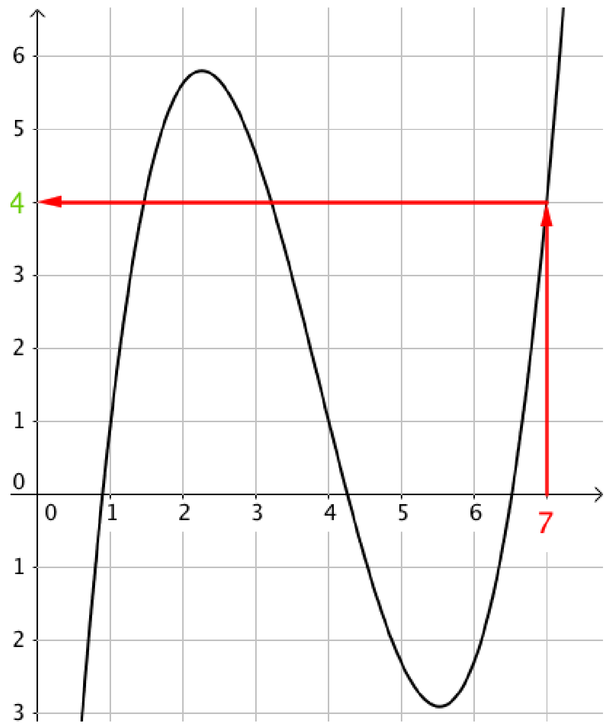


Correction

a) Pour déterminer l'image de 7, on « part » de l'abscisse 7, on « rejoint » la courbe et on lit la valeur correspondante sur l'axe des ordonnées.

On lit donc que l'image de 7 est 4.

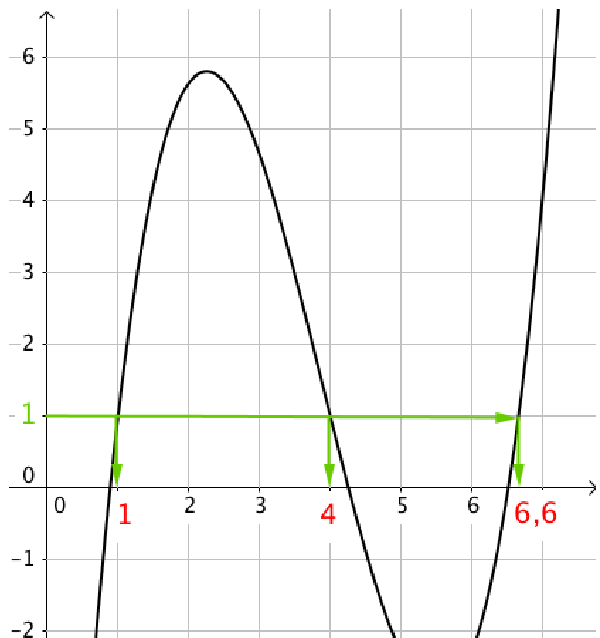
On peut noter : $f(7) = 4$.



b) Pour déterminer des antécédents de 1, on « part » de l'ordonnée 1, on « rejoint » la courbe et on lit les valeurs correspondantes sur l'axe des abscisses.

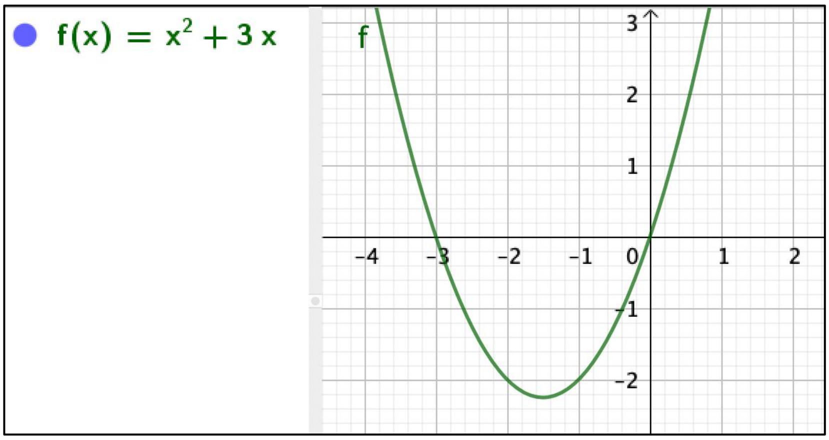
On lit donc que des antécédents de 1 sont 1, 4 et 6,6.

On peut par exemple noter : $f(4) = 1$.



3. <u>Tableau de signes</u>

Ouvrir le logiciel *GeoGebra* et saisir directement l'expression de la fonction f définie par $f(x) = x^2 + 3x$.
Dans la barre de saisie, on écriera : f(*x*)=*x*^2+3*x*

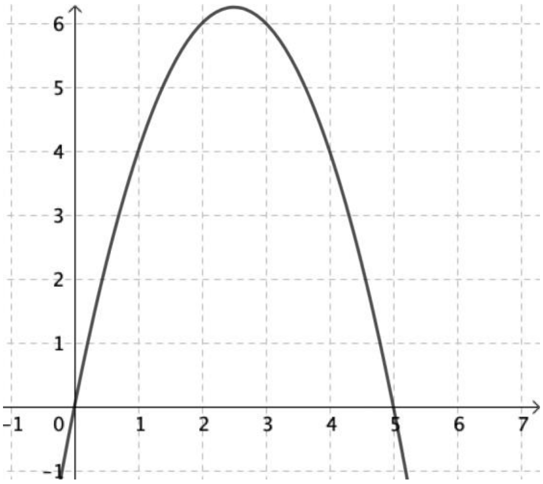


On constate que la fonction f s'annule en -3 et en 0.
Elle est positive avant -3 et après 0. Elle est négative entre -3 et 0.
On peut ainsi dresser le tableau de signes de la fonction f :

x	$-\infty$		-3		0		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Partie 4 : Résolution graphique d'équations et d'inéquations

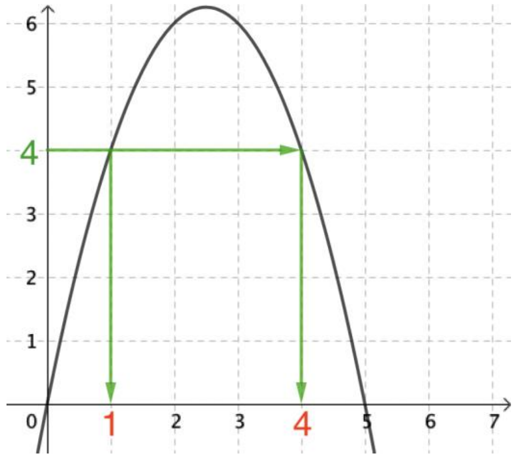
Méthode : Résoudre graphiquement une équation



On a représenté la courbe de la fonction f définie par $f(x) = 5x - x^2$.
Résoudre graphiquement l'équation $5x - x^2 = 4$.

Correction
L'équation $5x - x^2 = 4$ peut s'écrire $f(x) = 4$.
Ce qui revient à trouver les antécédents de 4 par la fonction f.
On « part » de l'ordonnée 4, on « rejoint » la courbe et on lit les solutions sur l'axe des abscisses : $x = 1$ ou $x = 4$.

On peut noter : $S = \{1 ; 4\}$.



Remarques :
- Par lecture graphique, les solutions obtenues sont approchées.
- L'équation $f(x) = 7$, par exemple, ne semble pas avoir de solution car la courbe représentée ne possède pas de point d'ordonnée 7.
- Graphiquement, on ne peut pas être certain que les solutions qui apparaissent sont les seules. Il pourrait y en avoir d'autres au-delà des limites de la représentation graphique tracée.

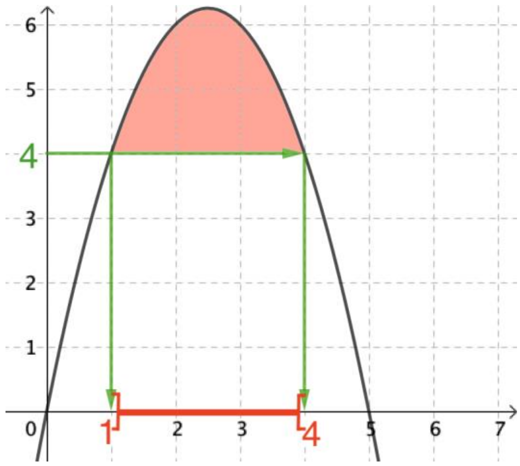
Méthode : Résoudre graphiquement une inéquation

Dans la méthode précédente, on a représenté la courbe de la fonction f définie par $f(x) = 5x - x^2$.
Résoudre graphiquement l'inéquation $5x - x^2 > 4$.

Correction

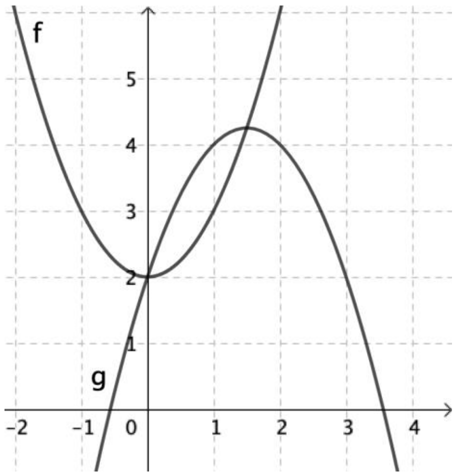
L'inéquation $5x - x^2 > 4$ peut s'écrire $f\ (x) > 4$.
Ce qui revient à déterminer les points de la courbe dont l'ordonnée est strictement supérieure à 4.
On lit les solutions correspondantes sur l'axe des abscisses :
x est strictement compris entre 1 et 4.

On peut noter : $S =]1\ ;\ 4[$.



Méthode : Résoudre graphiquement une équation ou une inéquation du type :
$f(x) = g(x)$, $f(x) < g(x)$

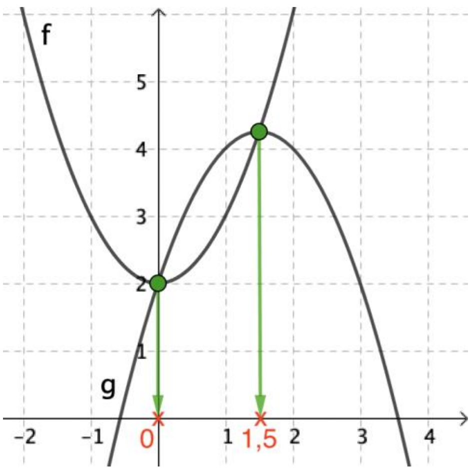
On a représenté les courbes des fonctions f et g définies par :
$f(x) = x^2 + 2$ et $g(x) = -x^2 + 3x + 2$.
a) Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = g(x)$.
b) Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) < g(x)$.



Correction

a) $f(x) = g(x)$ lorsque les courbes se coupent.
Il suffit de lire l'abscisse des points d'intersection des deux courbes.

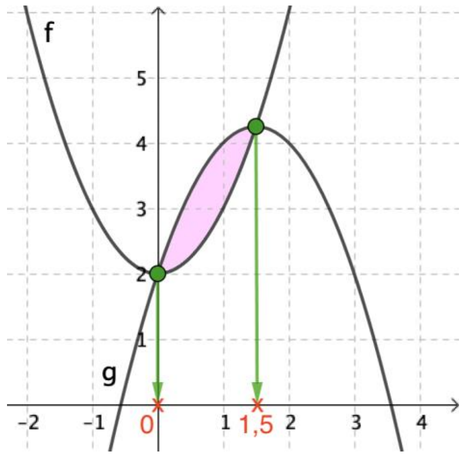
On lit les solutions sur l'axe des abscisses : 0 et 1,5.
On peut noter : $S = \{0\ ; 1{,}5\}$.



b) $f(x) < g(x)$ lorsque la courbe de g se trouve au-dessus de la courbe de f.
On lit l'ensemble des solutions sur l'axe des abscisses : l'intervalle $]0\ ; 1{,}5[$.

On peut noter : $S =]0\ ;\ 1{,}5[$.

Les valeurs 0 et $1{,}5$ sont exclues de l'ensemble des solutions car dans l'inéquation $f(x) < g(x)$ l'inégalité est stricte.



ALGORITHME

<u>TP avec Python :</u> Calcul de la longueur approchée d'une portion de courbe représentative d'une fonction
https://www.maths-et-tiques.fr/telech/Algo_LongCourbe.pdf

```
L ← 0
p ← 3/N
x1 ← 0
x2 ← x1 + p
Pour i allant de 1 à N
        y1 ← 1/(x1 + 1)
        y2 ← 1/(x2 + 1)
        L ← L + …
        x1 ← x1 + p
        x2 ← x2 + p
Fin Pour
Afficher L
```