# VARIATIONS D'UNE FONCTION

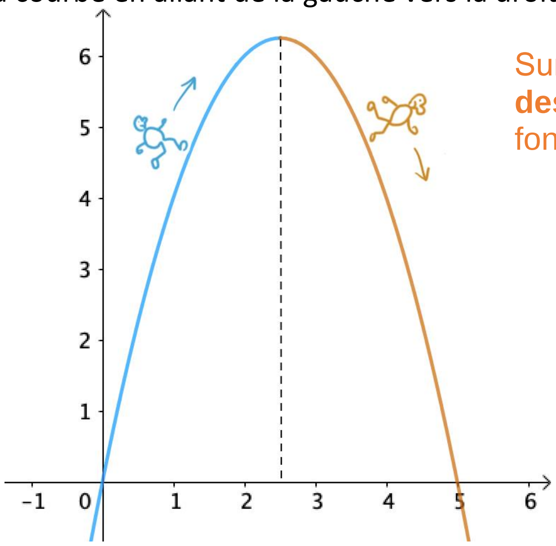
## Partie 1 : Fonctions croissantes et fonctions décroissantes

### 1. Définitions

On a représenté ci-dessous dans un repère la fonction $f$ définie par $f(x) = 5x - x^2$.

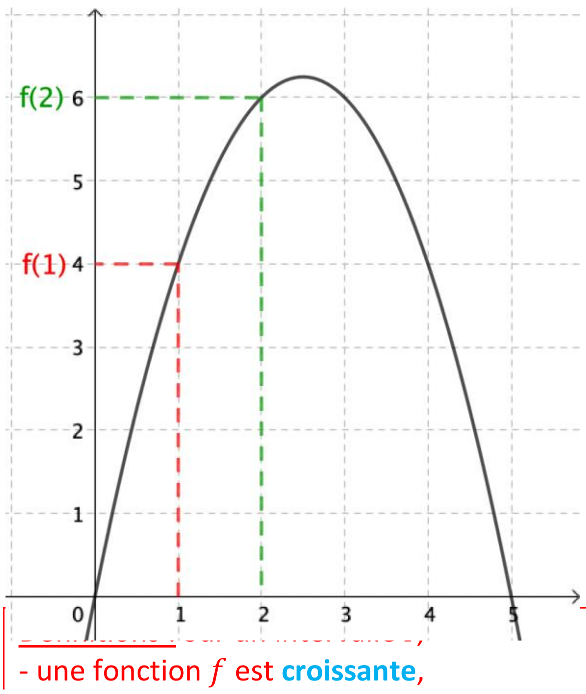
Lorsqu'on se promène sur la courbe en allant de la gauche vers la droite :

Sur l'intervalle $[0\,;\,2{,}5]$, on **monte**, on dit que la fonction est **croissante**.

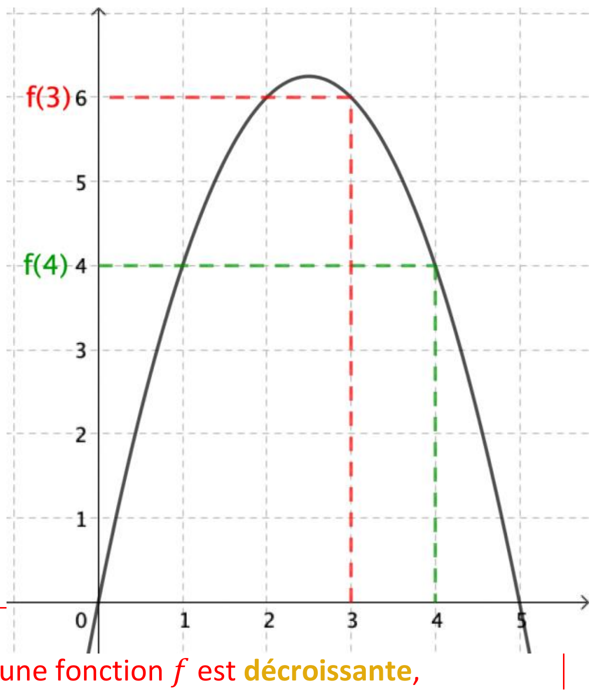


Sur l'intervalle $[2{,}5\,;\,5]$, on **descend**, on dit que la fonction est **décroissante**.

$f$ est croissante sur $[0\,;\,2{,}5]$ :
Si $x$ augmente ($1 < 2$),
alors $f(x)$ augmente ($f(1) < f(2)$).

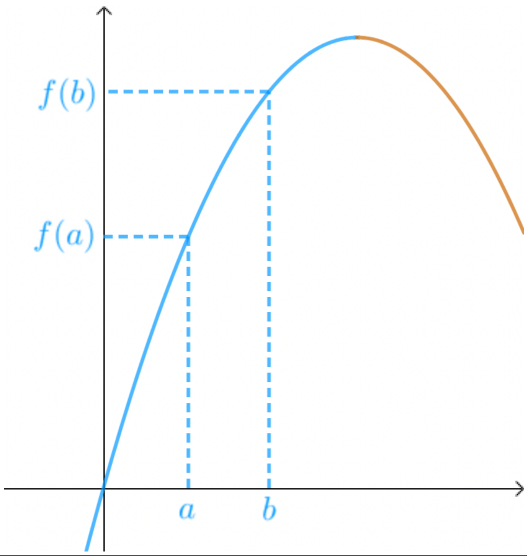



$f$ est décroissante sur $[2{,}5\,;5]$ :
Si $x$ augmente ($3 < 4$),
alors $f(x)$ diminue ($f(3) > f(4)$).

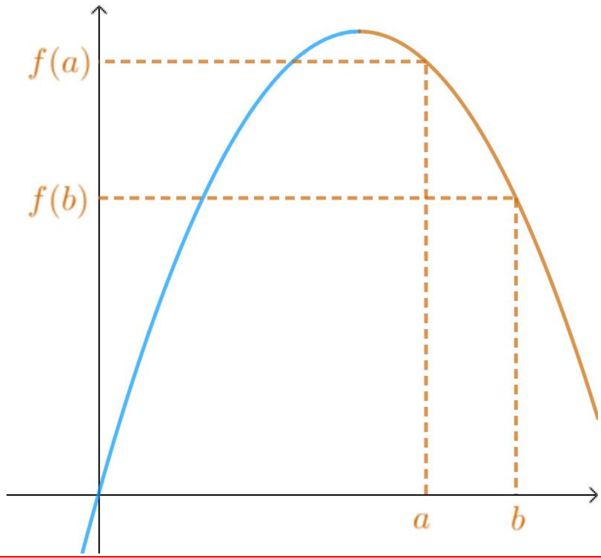



- une fonction $f$ est **croissante**,

- une fonction $f$ est **décroissante**, si $a < b$ alors $f(a) \leq f(b)$.




si $a < b$ alors $f(a) \geq f(b)$.



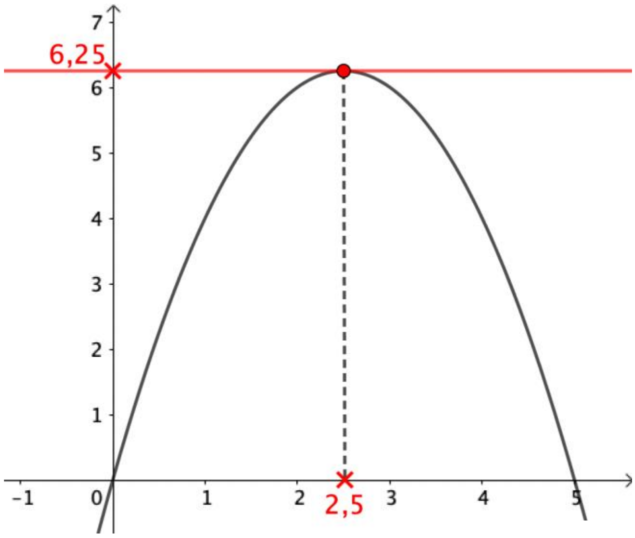

Remarques :

- Pour une fonction $f$ **constante** : on a toujours $f(a) = f(b)$.
- Dire que $f$ est **monotone** signifie que $f$ est soit croissante, soit décroissante.
- On dit qu'une fonction croissante conserve l'ordre et qu'une fonction décroissante renverse l'ordre.

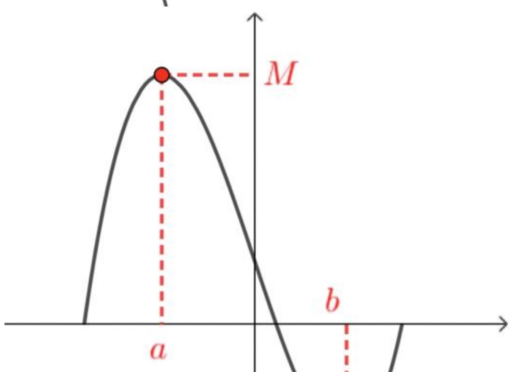
Exercice : Déterminer les variations d'une fonction

## 2. Maximum et minimum

Exemple : On reprend la fonction $f$ définie dans l'exemple de la partie 1.
Sur l'intervalle $[0\ ;\ 5]$, on a : $f(x) \leq f(2{,}5) = 6{,}25$.
On dit que 6,25 est le maximum de la fonction $f$. Ce maximum est atteint en 2,5.




Définitions : Sur un intervalle $I$,
- une fonction $f$ admet un **maximum** $M$ en $a$, si pour tout $x$, $f(x) \leq f(a) = M$.



- une fonction $f$ admet un **minimum** $m$ en $b$,
si pour tout $x$, $f(x) \geq f(b) = m$.

Remarque : Un minimum ou un maximum
s'appelle un **extremum**.

TP avec Python :
Approcher un extremum par la méthode du balayage

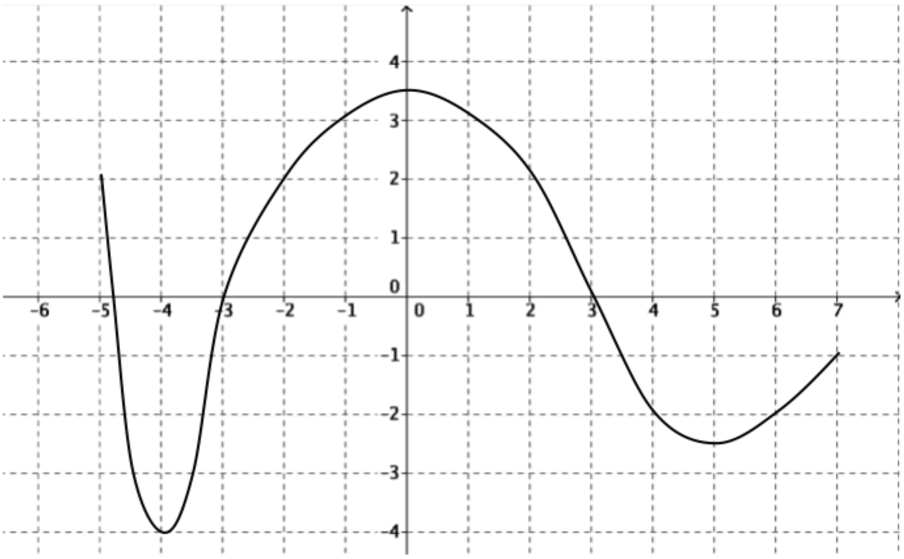
**Pour** i allant de 1 à N
    Affecter à x la valeur x + p
    Affecter à y la valeur f(x)
    **Si** y > max
        **Alors** affecter à max la valeur y
    **Si** y < min
        Alors affecter à min la valeur y
    **Fin Si**

3. Tableau de variations

Un tableau de variations résume les variations d'une fonction en faisant apparaître les intervalles où elle est monotone.

Méthode : Déterminer graphiquement les variations d'une fonction et dresser le tableau de variations

On considère la représentation graphique la fonction $f$ :




a) Sur quel intervalle la fonction $f$ est-elle définie ?
b) Donner les variations de la fonction.
c) Donner les extremums de la fonction en précisant où ils sont atteints.
d) Résumer les résultats précédents dans un tableau de variations.

**Correction**
a) La fonction $f$ est définie sur $[-5\ ;\ 7]$.
b) La fonction $f$ est croissante sur les intervalles $[-4\ ;\ 0]$ et $[5\ ;\ 7]$. Elle est décroissante sur les intervalles $[-5\ ;\ -4]$ et $[0\ ;\ 5]$.
c) Le maximum de $f$ est 3,5. Il est atteint en $x = 0$.
Le minimum de $f$ est $-4$. Il est atteint en $x = -4$ .
d)

| $x$ | -5 | | -4 | | 0 | | 5 | | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 2 | ↘ | -4 | ↗ | 3,5 | ↘ | -2,5 | ↗ | -1 |

## Partie 2 : Cas des fonctions affines

1. Définitions

Définitions : Une **fonction affine** $f$ est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$, où $a$ et $b$ sont deux nombres réels.
Lorsque $b = 0$, la fonction $f$ définie par $f(x) = ax$ est une **fonction linéaire**.

Exemples :
- Fonction affine : $f(x) = -x + 6$
- Fonction linéaire : $g(x) = -\frac{2}{7}x$

2. Variations

Propriété : Soit $f$ une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$.
Si $a > 0$, alors $f$ est croissante.
Si $a < 0$, alors $f$ est décroissante.
Si $a = 0$, alors $f$ est constante.

Démonstration :
Soient $m$ et $p$ deux nombres réels tels que $m < p$.
$f(p) - f(m) = (ap + b) - (am + b) = a(p - m)$
On sait que $m < p$ donc $p - m > 0$.
Le signe de $f(p) - f(m)$ est le même que celui de $a$.

- Si $a > 0$, alors $f(p) - f(m) > 0$ soit $f(m) < f(p)$.
Donc $f$ est croissante.
- Si $a = 0$, alors $f(p) - f(m) = 0$ soit $f(m) = f(p)$.
Donc $f$ est constante.
- Si $a < 0$, alors $f(p) - f(m) < 0$ soit $f(m) > f(p)$.

Donc $f$ est décroissante.

Méthode : Déterminer les variations d'une fonction affine

Déterminer les variations des fonctions affines suivante :
a) $f(x) = 3x + 2$ b) $g(x) = 7 - 6x$ c) $h(x) = -x$

**Correction**
1) $f(x) = 3x + 2$ $a > 0$ donc $f$ est croissante.
2) $g(x) = 7 - 6x = -6x + 7$ $a < 0$ donc $g$ est décroissante.
3) $h(x) = -x = -1x$ $a < 0$ donc $h$ est décroissante.

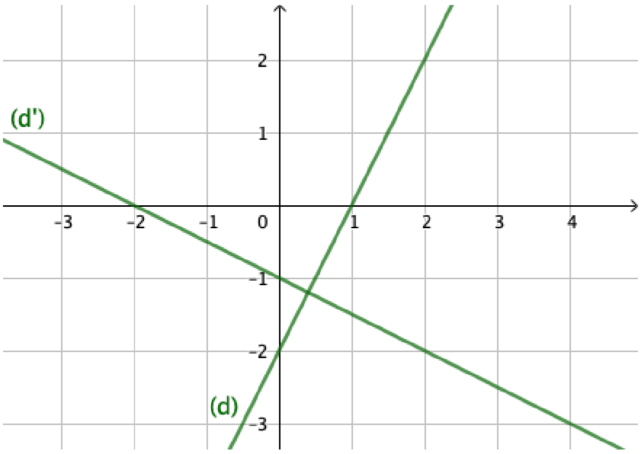
3. Représentation graphique

Propriétés :
- Une fonction affine est représentée par une droite.
- Une fonction linéaire est représentée par une droite passant par l'origine du repère.

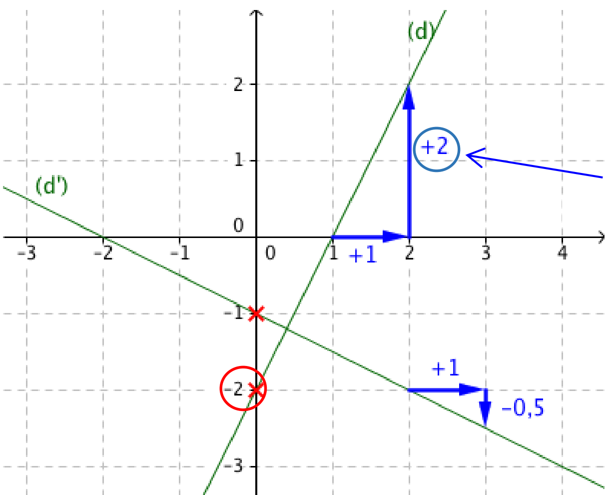
Soit la fonction affine $f$ définie par $f(x) = \boldsymbol{a}x + \boldsymbol{b}$.
$\boldsymbol{a}$ s'appelle le **coefficient directeur**
$\boldsymbol{b}$ s'appelle l'**ordonnée à l'origine.**

Méthode : Déterminer graphiquement une fonction affine

Déterminer graphiquement l'expression des fonctions $f$ et $g$ représentées respectivement par les droites (d) et (d').




**Correction**




Ce nombre est le **coefficient directeur**.
Si on avance de 1 : on monte de **2**.

Ce nombre est l'**ordonnée à l'origine**.
$-\mathbf{2}$ se lit sur l'axe des ordonnées.

Pour ($d$) : Le coefficient directeur est 2
L'ordonnée à l'origine est $-2$
L'expression de la fonction $f$ est : $f(x) = 2x - 2$

Pour ($d'$) : Le coefficient directeur est $-0{,}5$
L'ordonnée à l'origine est $-1$
L'expression de la fonction $g$ est : $g(x) = -0{,}5x - 1$

Propriété des accroissements : Soit la fonction affine $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$ et deux nombres réels distincts $m$ et $n$.

Alors : $a = \dfrac{f(m)-f(n)}{m-n}$

Démonstration :
$f(m) - f(n) = (am + b) - (an + b) = am + b - an - b = am - an = a(m - n)$
Comme $m \neq n$, et on a : $a = \dfrac{f(m)-f(n)}{m-n}$.

Remarque : Dans le calcul de $a$, inverser $m$ et $n$ n'a pas d'importance.
En effet : $\dfrac{f(m)-f(n)}{m-n} = \dfrac{f(n)-f(m)}{n-m}$

Méthode : Déterminer l'expression d'une fonction affine

Déterminer par calcul une expression de la fonction affine $f$ telle que :
$f(-2) = 4$ et $f(3) = 1$.

**Correction**
$f$ est une fonction affine, donc elle s'écrit sous la forme : $f(x) = ax + b$.

- **Calcul de $a$ :**

On a $f(-2) = 4$ et $f(3) = 1$, donc d'après la propriété des accroissements :

$$a = \frac{f(3)-f(-2)}{3-(-2)}$$
$$= \frac{1-4}{3-(-2)}$$

$= -\frac{3}{5}$

Donc : $f(x) = -\frac{3}{5}x + b$.

- **Calcul de b :**

On a par exemple : $f(3) = 1$, donc :

$-\frac{3}{5} \times 3 + b = 1$

$-\frac{9}{5} + b = 1$

$b = 1 + \frac{9}{5}$

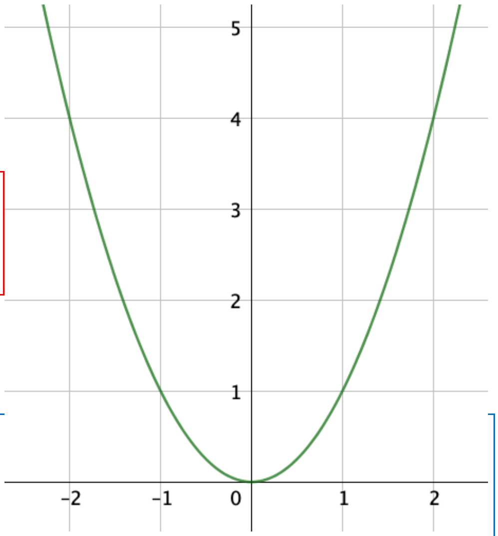
$b = \frac{5}{5} + \frac{9}{5}$

$b = \frac{14}{5}$

- D'où : $f(x) = -\frac{3}{5}x + \frac{14}{5}$.

# Partie 3 : Cas des fonctions de référence

1. Variations de la fonction carré




Propriété :
La fonction carré est décroissante sur l'intervalle $]-\infty\,;0]$ et croissante sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

Démonstration au programme :

On pose : $f(x) = x^2$.

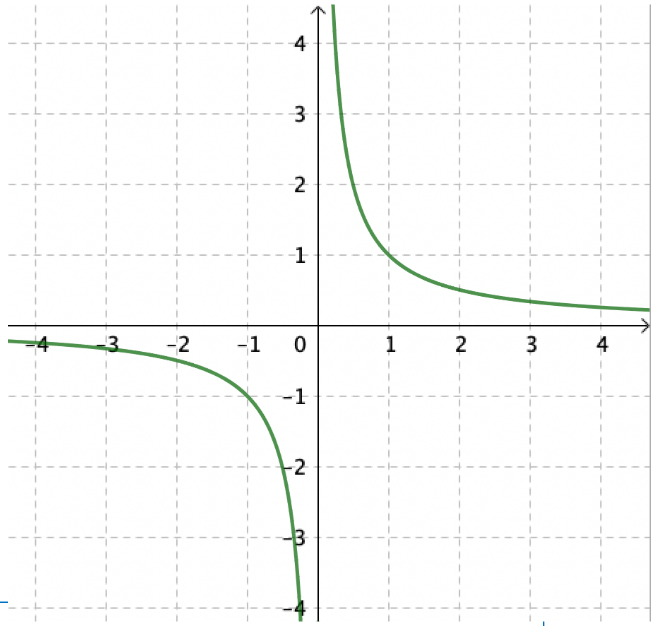
- Soit $a$ et $b$ deux nombres réels quelconques positifs tels que $a < b$.

$f(b) - f(a) = b^2 - a^2 = (b-a)(b+a)$

Or $b - a > 0$, $a \geq 0$ et $b \geq 0$ donc $f(b) - f(a) \geq 0$ ce qui prouve que $f$ est croissante sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

- La décroissance sur l'intervalle $]-\infty\,;0]$ est prouvée de manière analogue en choisissant $a$ et $b$ deux nombres réels quelconques négatifs tels que $a < b$.

2. Variations de la fonction inverse




Propriété :
La fonction inverse est décroissante sur l'intervalle $]-\infty\,;0[$ et décroissante sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

**Démonstration au programme :**

On pose : $f(x) = \frac{1}{x}$.
- Soit $a$ et $b$ deux nombres réels strictement positifs avec $a < b$.
$f(b) - f(a) = \frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{a-b}{ab}$
Or $a > 0$, $b > 0$ et $a - b < 0$. Donc $f(b) - f(a) \leq 0$.
$f$ est ainsi décroissante sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.
- La décroissance sur l'intervalle $]-\infty\,;0[$ est prouvée de manière analogue.

Propriété : Si $a$ et $b$ sont deux nombres réels de même signe, on a alors :

$$a < b \quad \textit{est équivalent à} \quad \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$$

En effet, la fonction inverse étant décroissante, l'ordre est renversé.

Méthode : Résoudre une inéquation avec la fonction inverse

Résoudre l'inéquation suivante pour tout $x$ strictement positif :
$\frac{4}{x} + 2 < 5$

**Correction**

$\frac{4}{x} + 2 < 5$

$\frac{4}{x} < 5 - 2$

$\frac{4}{x} < 3$

$\frac{1}{x} < \frac{3}{4}$ ← On divise de part et d'autre par 4.

← On applique la propriété donnée plus haut.

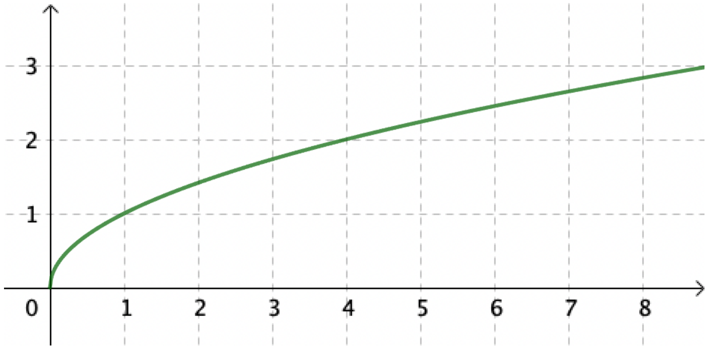
$\frac{x}{1} > \frac{4}{3}$

$x > \frac{4}{3}$

$S = \left]\frac{4}{3}\ ;\ +\infty\right[$

3. Variations de la fonction racine carrée

Propriété : La fonction racine carrée est strictement croissante sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.




**Démonstration au programme :**

On pose : $f(x) = \sqrt{x}$.
Soit $a$ et $b$ deux nombres réels positifs tels que $a < b$.

$f(b) - f(a) = \sqrt{b} - \sqrt{a} = \frac{(\sqrt{b}-\sqrt{a})(\sqrt{b}+\sqrt{a})}{\sqrt{b}+\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{b}^2-\sqrt{a}^2}{\sqrt{b}+\sqrt{a}} = \frac{b-a}{\sqrt{b}+\sqrt{a}}$.

Or $\sqrt{b} + \sqrt{a} > 0$ et $b - a > 0$. Donc $f(b) - f(a) > 0$
Donc $f(a) < f(b)$.
Ce qui prouve que $f$ est croissante sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

Propriété : Si $a$ et $b$ sont deux nombres réels positifs, on a alors :

$$a < b \quad \textit{est équivalent à} \quad \sqrt{a} < \sqrt{b}$$

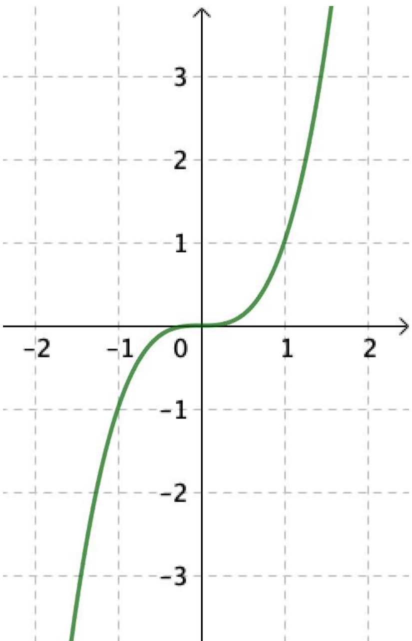
En effet, la fonction racine carrée étant croissante, l'ordre est conservé.

4. Variations de la fonction cube

Propriété : La fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Propriété : $a < b \quad \textit{est équivalent à} \quad a^3 < b^3$

En effet, la fonction cube étant croissante, l'ordre est conservé.



Méthode : Ordonner des nombres avec la fonction cube

Sans calculatrice, ranger les nombres suivants dans l'ordre croissant :

$$\frac{1}{8} \qquad 4^3 \qquad -5^3 \qquad \left(\frac{2}{3}\right)^3 \qquad -\frac{1}{8}$$

**Correction**

On a :

$$\frac{1}{8}=\frac{1}{2^3}=\frac{1^3}{2^3}=\left(\frac{1}{2}\right)^3 \qquad -5^3=(-5)^3 \qquad -\frac{1}{8}=\left(-\frac{1}{2}\right)^3$$

La fonction cube conserve l'ordre.
Donc, pour ranger dans l'ordre croissant les nombres :

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 \qquad 4^3 \qquad (-5)^3 \qquad \left(\frac{2}{3}\right)^3 \qquad \left(-\frac{1}{2}\right)^3$$

il suffit de ranger dans l'ordre croissant ces nombres sans l'exposant 3.
Soit, à ranger :

$$\frac{1}{2} \qquad 4 \qquad -5 \qquad \frac{2}{3} \qquad -\frac{1}{2}$$

Or :

$$-5<-\frac{1}{2}<\frac{1}{2}<\frac{2}{3}<4$$

Donc :

$$(-5)^3<\left(-\frac{1}{2}\right)^3<\left(\frac{1}{2}\right)^3<\left(\frac{2}{3}\right)^3<4^3$$

Soit :

$$-5^3<-\frac{1}{8}<\frac{1}{8}<\left(\frac{2}{3}\right)^3<4^3$$