Série d'exercices sur l'ordre dans R

Exercice 1 .

Soient a *et* b *deux réels positifs tels que :* $1 < a < b$.
Comparer les nombres $A = a^2 + 1$ *et* $B = ab + 2$.

Exercice 2 .

Soient a *et* b *deux réels strictement positifs.*
Montrer que : $\dfrac{7a+2b}{7a} \geq \dfrac{8b}{7a+2b}$.

Exercice 3 .

Soient a *et* b *deux réels non nuls. Les réels* a *et* b *ont le même signe.*
Montrer que : $(a+b)\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}\right) \geq 4$.

Exercice 4 .

Soient a, b *et* c *des réels.*

1. *Montrer que :* $a^2 + b^2 \geq 2ab$.
2. **a)** *Déduire que :* $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc$

   b) *Déduire que :* $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq (a+b)(c+d)$.

Exercice 5 .

Soient x *et* y *deux réels tels que :* $2 \leq x \leq 5$ *et* $-4 \leq y \leq -2$.
Encadrer les nombres suivants : $x \times y$, $\dfrac{x}{y}$ *et* $\dfrac{x^2+y^2}{x-y}$.

Exercice 6 .

1. *Simplifier :* $A = \sqrt{\dfrac{1}{\left(3-\sqrt{10}\right)^2}} - \sqrt{\dfrac{1}{\left(3+\sqrt{10}\right)^2}}$.
2. *Soient* a *et* b *deux réels tels que :* $3 < a < b$.

   Simplifier puis calculer E *tel que :* $E = \sqrt{(a-b)^2} + \sqrt{(3-a)^2} - (b-2)$.
3. *Soient* a *et* b *deux réels tels que :* $b \in [-3, -1]$ *et* $a \in [-2, 5]$.

   Simplifier :
   $$A = 2\,|2a+7| - |3b| + 2\,|b+8| - |2b-a|$$

Exercice 7 .

Soient a *et* b *deux réels tels que :* $|a+2| \leq 3$ *et* $-1 \leq b \leq 4$.

1. *Montrer que :* $a \in [-5, 1]$.

2. *Montrer que :* $|a + b - 1| \leq 7$.

3. *On pose :* $E = ab + 6b - 5a$.

   a) *Vérifier que :* $E = (a + 6)(b - 5) + 30$

   b) *Déduire un encadrement pour le nombre* E.

Exercice 8 .

On pose : $A = x + y - 6xy$. *Soient* x *et* y *deux réels de l'intervalle* $\left[0, \frac{1}{3}\right]$.

1. *Montrer que :* $\frac{-1}{3} \leq 2y - \frac{1}{3} \leq \frac{1}{3}$ *et* $\frac{-1}{2} \leq \frac{1}{2} - 3x \leq \frac{1}{2}$.

2. *Vérifier que :* $\left|A - \frac{1}{6}\right| = \left|\frac{1}{2} - 3x\right| \left|2y - \frac{1}{3}\right|$.

3. *Déduire que :* $A \in \left[0, \frac{1}{3}\right]$.

Exercice 9 .

On donne : $|x - 1| < \frac{1}{2}$.

1. *Montrer que :* $|x^2 - 1| < \frac{5}{4}$.

2. *Montrer que :* $\frac{1}{4} < \frac{1}{2x + 1} < \frac{1}{2}$.

3. *Déduire que :* $\left|\frac{x - 1}{2x + 1}\right| < \frac{1}{4}$.

Exercice 10 .

Soit $x \in \left[\frac{-1}{3}, \frac{1}{3}\right]$.

1. *Vérifier que :* $\frac{1 + x}{1 + 2x} - (1 - x) = \frac{2x^2}{1 + 2x}$.

2. *Montrer que :* $\frac{2}{1 + 2x} \leq 6$, *et déduire que :* $\left|\frac{1 + x}{1 + 2x} - (1 - x)\right| \leq 6x^2$.

3. *Déduire que* $\frac{4}{5}$ *est une valeur approximative du nombre* $\frac{1,2}{1,4}$ *par la précision* $2,4 \times 10^{-1}$.

Exercice 11 .

1. *Montrer que si* $x \in [0, 1]$ *alors* $\frac{1}{x + 1} \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

2. *Soient x et y deux réels tels que :* $x \in [0,1]$ *et* $y \in [0,1]$.

   Montrer que : $\left|\dfrac{1}{1+x} - \dfrac{1}{1+y}\right| \leq |x-y|$.

3. *On pose :* $0,866 < \dfrac{\sqrt{3}}{2} < 0,867$ *et* $0,707 < \frac{\sqrt{2}}{2} < 0,708$

   a) *Donner une approximation à* 2×10^{-3} *par excès et défaut pour le nombre :* $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

   b) *Déduire que :* $\left|\dfrac{1}{1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}} - \dfrac{1}{1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}}\right| < 0,2.$

Exercice 12 .

On pose : $A = \sqrt{x^2+1} - |x|$ *et* $B = \sqrt{x^2+1} + |x|$.

1. *Montrer que pour tout* $x \in \mathbb{R}$: $A > 0$. *Déduire que :* $B > 2|x|$.

2. *Calculer :* AB *puis déduire que* $A < \dfrac{1}{2|x|}$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}^*$.

3. *Déduire que :* $|x| < \sqrt{1+x^2} < |x| + \dfrac{1}{2|x|}$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}^*$.

4. *Donner un encadrement pour le nombre* $\dfrac{\sqrt{122}}{3}$ *d'amplitude* $\dfrac{1}{66}$.

Exercice 13 .

Soit x un réel tel que $x > 1$ on pose : $A = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}}$.

1. *Montrer que :* $A - 1 = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\right)}$.

2. **a)** *Vérifier que :* $2\sqrt{x-1} \leq \sqrt{x} + \sqrt{x-1} \leq 2\sqrt{x}$.

   b) *Déduire que :* $\dfrac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{x-1}} \leq A - 1 \leq \dfrac{1}{2(x-1)}$.

3. **a)** *Montrer que :* $\dfrac{1}{x} \leq \dfrac{1}{\sqrt{x}\sqrt{x-1}}$.

   b) *Déduire que :* $1 + \dfrac{1}{2x} \leq A \leq \dfrac{1}{2(x-1)} + 1$.

4. *Déduire que le nombre* $\dfrac{9}{4}$ *est une valeur approchée de* $\sqrt{5}$ *à la précision* $\dfrac{1}{20}$.

FIN