Série d'exercices sur le calcul vectoriel dans le plan

Exercice 1 .

Soit $ABCD$ un parallèlogramme E et F deux points du plan tels que : $\overrightarrow{DE} = \frac{5}{2}\overrightarrow{DA}$ *et* $\overrightarrow{DF} = \frac{5}{3}\overrightarrow{DC}$.

1. *Montrer que :* $\overrightarrow{BE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{BF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BC}$.
2. *Exprimer les vecteurs* $\overrightarrow{BE}$ *et* $\overrightarrow{BF}$ *en fonction de* $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{BC}$.
3. *Montrer que :* $2\overrightarrow{BE} = 3\overrightarrow{FB}$, *puis déduire que les points B, E et F sont alignés.*

Exercice 2 .

Soit $ABCD$ un parallèlogramme E et F deux points tels que : $\overrightarrow{CE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$ *et* $\overrightarrow{AF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AE}$.

1. **a)** *Montrer que :* $\overrightarrow{FE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{FA}$.
   b) *Montrer que :* $\overrightarrow{FC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{FB}$.
2. *Déduire que les points B, C et F sont alignés.*

Exercice 3 .

Soit ABC un triangle I, J et K trois points tels que : $\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ *et* $\overrightarrow{AK} = 2\overrightarrow{AC}$.

1. *Tracer les points I, J et K.*
2. *Montrer que :* $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.
3. *Montrer que :* $\overrightarrow{JK} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB}$.
4. *Que peut-on conclure pour les points J, K et I ?*

Exercice 4 .

Soit ABC un triangle et I et J deux points du plan tels que : $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ *et* $\overrightarrow{BJ} = -\overrightarrow{BC}$.

1. **a)** *Montrer que :* $\overrightarrow{AJ} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.

b) *Déduire que :* $\overrightarrow{IJ} = 2\overrightarrow{AB} - \frac{4}{3}\overrightarrow{AC}.$

2. *Soit K un point défini par :* $\overrightarrow{AK} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}.$

   a) *Montrer que :* $\overrightarrow{IK} = -\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}.$

   b) *Déduire que les points I, J et K sont alignés.*

Exercice 5 .

Soit ABC un triangle et P et Q deux points tels que : $\overrightarrow{AP} = \frac{5}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{3}{2}\overrightarrow{CB}$ *et* $\overrightarrow{CQ} = -2\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.$

Montrer que B est milieu du segment $[PQ]$.

Exercice 6 .

Soit ABC un triangle et $k \in \mathbb{R}$ et E et F deux points du plan tels que :

$$\overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{AB} + (1+k)\overrightarrow{AC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AF} = (1+k)\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$$

1. *Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{CB}$ sont colinéaires pour tout $k \in \mathbb{R}$.*

2. *Calculer la valeur de k si $E = F$.*

3. *Calculer la valeur de k pour que le quadrilatère $BCEF$ soit un parallèlogramme.*

Exercice 7 .

$ABCD$ est un parallèlogramme et E est le milieu de $[BC]$ et F est le milieu de $[CD]$.

Montrer que : $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}.$

FIN