Série d'exercices N2 sur les équations, inéquations et systèmes

Exercice 1 .

Soit le polynôme $P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6.$

1. *Montrer que* $P(x)$ *est divisible par* $(x-1)$.
2. **a)** *Déterminer les nombres* a *et* b *tels que :* $P(x) = (x-1)(x^2+ax+b)$, *pour tout* $x \in \mathbb{R}$.

   b) *Écrire le polynôme* $P(x)$ *sous la forme des polynômes de premier degré.*
3. **a)** *Résoudre dans* $\mathbb{R}$ *l'inéquation :* $P(x) \geq 0$.

   b) *Déduire l'ensemble des solutions de l'inéquation :* $(I) : 6 - 2x \geq \sqrt{x}\,(5-x)$.

Exercice 2 .

Soit le polynôme $P(x) = x^3 - 9x^2 + 11x + 21.$

1. *Calculer* $P(-1)$.
2. *Déterminer le quotient de la division euclidienne du polynôme* $P(x)$ *par* $(x+1)$.
3. *Résoudre dans* $\mathbb{R}$ *l'inéquation :* $P(x) > 0$.

Exercice 3 .

Soit le polynôme $P(x) = 2x^3 + x^2 - 22x + 24.$

1. **a)** *Montrer que le polynôme* $P(x)$ *est divisible par* $\left(x - \dfrac{3}{2}\right)$.

   b) *Déduire que* $P(x)$ *s'écrit sous la forme des polynômes de premier degré.*
2. *Résoudre dans* $\mathbb{R}$ *l'inéquation :* $P(x) > 0$.
3. *Résoudre dans* $\mathbb{R}$ *l'équation :* $2|x|^3 + x^2 - 22|x| + 24 = 0$.
4. *Résoudre dans* $\mathbb{R}$ *l'inéquation* $(I) : 2|x|^3 + x^2 - 22|x| + 24 \geq 0$.

Exercice 4 .

On considère l'équation $(E) : x^3 - 15x^2 + 62x - 72 = 0 \quad, x \in \mathbb{R}$.

1. *Montrer que l'équation* (E) *est équivalente au système* $\begin{cases} x = X + 5 \\ X \in \mathbb{R}, \quad X^3 - 13X - 12 = 0 \end{cases}$

2. *Donner une solution évidente de l'équation :* $X^3 - 13X - 12 = 0, \quad X \in \mathbb{R}$.

3. *Déterminer les réels* a, b *et* c *tels que pour tout* $X \in \mathbb{R}$: $X^3 - 13X - 12 = (X+1)(aX^2 + bX + c)$.

4. **a)** *Résoudre dans* $\mathbb{R}$ *l'équation* $X^3 - 13X - 12 = 0$.
   b) *Déduire l'ensemble des solutions de l'équation* (E).

Exercice 5 .

On considère le trinôme $T(x) = -4x^2 + 4x + 5$.

1. **a)** *Déterminer la forme canonique du trinôme* $T(x)$.
   b) *Montrer que :* $T(x) \leq 6$, *pour tout* $x \in \mathbb{R}$.

2. **a)** *Vérifier que le trinôme* $T(x)$ *admet deux racines distinctes* α *et* β *sans les calculer.*
   b) *Calculer la valeur de chacun des nombres suivants :* $\alpha \times \beta, \quad \alpha + \beta, \quad \alpha^2 + \beta^2$ *et* $\alpha^3 + \beta^3$.

3. **a)** *Résoudre dans* $\mathbb{R}$ *l'équation* $T(x) = 0$.
   b) *En déduire l'ensemble des solutions dans* $\mathbb{R}$ *de l'inéquation* $T(x) \geq 0$.

Exercice 6 .

1. **a)** *Résoudre dans* $\mathbb{R}$ *l'équation* $(E) : x^2 + 2x - 8 = 0$.
   b) *Résoudre dans* $\mathbb{R}$ *l'inéquation* $(I) : \dfrac{2x^2 + x - 10}{x^2 - 4} \leq \dfrac{3}{2}$.

2. *On considère le polynôme* $P(x) = x^3 + \left(\sqrt{2} - 1\right)x^2 - \left(2 + \sqrt{2}\right)x - 2\sqrt{2}$.
   a) *Déterminer un polynôme* $Q(x)$ *tel que :* $P(x) = (x+1)\,Q(x)$.
   b) *Résoudre dans* $\mathbb{R}$ *l'équation* $P(x) = 0$.
   c) *Résoudre dans* $\mathbb{R}$ *l'inéquation :* $|x|^3 + \left(\sqrt{2} - 1\right)x^2 - \left(2 + \sqrt{2}\right)|x| - 2\sqrt{2} < 0$.

Exercice 7 .

On considère l'équation $(E) : x^2 - 6x - 3 = 0$.

1. *On pose* $a = 1 - \sqrt{3}$ *et* $b = \dfrac{1 + \sqrt{3}}{\sqrt{3}}$. *Montrer que :* $\dfrac{a}{b} = 3 - 2\sqrt{3}$, *puis* $\left(\dfrac{a}{b}\right)^2 - 6\left(\dfrac{a}{b}\right) - 3 = 0$.

2. *Déduire l'ensemble des solutions de l'équation* (E) *sans calculer* Δ.

FIN